Correction 1

x	$-\infty$		-4		-2		-1		2		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0		-		0	$+$	0	-	
Variation de f	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3
Signes de f		$+$			0		$-$				

Correction 2

Les indications données dans l'énoncé permettent d'obtenir les images suivantes par la fonction f :

- $f(-1) = 3$
- $f(5) = -2 \cdot f(-1) = -2 \times 3 = -6$
- $f(-3) = f(5) + 5 = -6 + 5 = -1$
- $f(2) = f(-1) \cdot f(5) = 3 \times (-6) = -18$

Ainsi, on obtient le tableau de variations de la fonction f :

x	-3		-1		2		5
Signe de f'		$+$	0	-	0	$+$	
Variation de f	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-18	$\nearrow$	-6

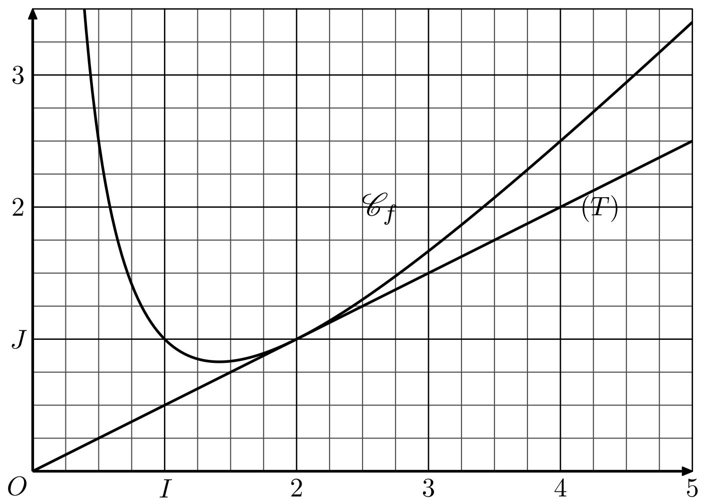
Correction 3

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'une somme pouvant s'écrire :
$$f(x) = x + \frac{2}{x} - 2 = x + 2 \times \frac{1}{x}$$
Ainsi, la fonction dérivée de la fonction f admet pour expression :
$$f'(x) = 1 + 2 \times \Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

2. a. Le coefficient directeur de la tangente (T) est le nombre dérivée de la fonction f en 2. Ainsi, ce coefficient directeur a pour valeur :
$$f'(2) = \frac{2^2 - 2}{2^2} = \frac{4 - 2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

b. Le coefficient directeur de (T) valant 2, cette tangente a son équation réduite qui admet pour expression :
$$y = \frac{1}{2} \cdot x + b$$
Le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 2 a pour ordonnée :
$$f(2) = 2 + \frac{2}{2} - 2 = 1$$
Ainsi, le point de coordonnées $(2\,;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ et, de plus, est le point de contact de la tangente (T) avec la courbe $\mathscr{C}_f$.
Etant un point de la tangente (T), ses coordonnées vérifient l'équation réduite de (T) :
$$y = \frac{1}{2} \cdot x + b$$
$$1 = \frac{1}{2} \times 2 + b$$
$$1 = \frac{1}{2} \times 2 + b$$
$$b = 1 - 1 = 0$$
Ainsi, la droite (T) admet pour équation réduite :
$$y = \frac{1}{2} \cdot x$$

c. Voici la représentation de la tangente (T) :



3. a. Cette différence admet pour expression :
$$f(x) - \frac{1}{2} \cdot x = \Big(x + \frac{2}{x} - 2\Big) - \frac{1}{2} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{2}{x} - 2$$
$$= \frac{x^2}{2 \cdot x} + \frac{4}{2 \cdot x} - \frac{4x}{2 \cdot x} = \frac{x^2 - 4x + 2}{2 \cdot x} = \frac{(x-2)^2}{2 \cdot x}$$

x	0		2		$+\infty$
$(x-2)^2$		$+$	0	$+$	
$2x$		$+$		$+$	
$f(x) - \frac{1}{2} \cdot x$		$+$	0	$+$	

b. La différence $f(x) - \frac{1}{2} \cdot$ étant toujours positive sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe toujours au dessus de la droite (d).

Correction 4

- La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $-0{,}5$. Or, aucune fonction ne s'annule en 0,5. Dans cet exercice, la fonction f représente forcemment la dérivée d'un fonction.

  La fonction f s'annule en -2 et en 1, ainsi la courbe de la fonction associée à f doit posséder deux tangentes horizontales pour ces valeurs. On en déduit que la fonction f est la fonction dérivée de la fonction $\mathscr{C}_j$ et $\mathscr{C}_\ell$

  La fonction f est positive sur l'intervalle $[-4\,;-2]$: la fonction associée doit être croissante sur cet intervalle. On en déduit la relation :
  $$\ell' = f$$

- De même, la courbe $\mathscr{C}_h$ admet trois tangentes horizontales. Or, aucune des fonctions présentent dans cet exercice admet trois racines : la fonction h représente la dérivée d'une fonction.

La fonction h s'annule en -2 et en 1 : la courbe de la fonction associée doit posséder deux tangentes horizontales aux points d'abscisses -2 et 1. Il ne reste plus que la fonction j.

On a la relation : $j' = h$

- Ainsi, les fonction g et k sont associées entre elles.

La fonction k s'annule en 4 mais la courbe $\mathscr{C}_g$ n'admet pas de tangente horizontale au point d'abscisse 4. La fonction k n'est pas la dérivée de la fonction g.

Par élimination des cas possibles, on en déduit que la fonction g est la dérivée de la fonction k :
$k' = g$

Correction 5

Une video est accessible

1. Le point M a pour abscisse x et appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$; ainsi, le point M a pour coordonnées :
$M\Big(x\,;\frac{1}{x^2-x+1}\Big)$
Ainsi, le rectangle formé par le point M a pour dimensions x et $\frac{1}{x^2-x+1}$. Son aire a pour valeur :
$$\mathcal{A}(x) = x\times\frac{1}{x^2-x+1} = \frac{x}{x^2-x+1}$$

2. a. L'expression de la fonction $\mathcal{A}$ est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = x^2-x+1$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 2x-1$
La fonction $\mathcal{A}$ admet pour dérivée la fonction $\mathcal{A}'$ dont l'expression est donnée par la formule :
$$\mathcal{A}'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{1\times(x^2-x+1) - x\times(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2-x+1-2x^2+x}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$$
$$= \frac{1^2-x^2}{(x^2-x+1)^2} = \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2-x+1)^2}$$

b. Le dénominateur de ce quotient étant strictement positif sur $\mathbb{R}_+$, on a le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}'(x)$					$+$	0	$-$	

c. On a la valeur suivante :
$$\mathcal{A}(1) = \frac{1}{1^2-1+1} = \frac{1}{1} = 1$$
Le signe de la fonction dérivée permet de déterminer le sens de variation de la fonction f. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Variation de $\mathcal{A}$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

3. Pour que l'aire du rectangle soit maximale, il est nécessaire que le point M ait pour abscisse 1.

Correction 6

a. $\big(e^5-e^4\big)^2 - \big(e^5+e^4\big)^2$
$$= \Big[\big(e^5\big)^2 - 2\cdot e^5\cdot e^4 + \big(e^4\big)^2\Big] - \Big[\big(e^5\big)^2 + 2\cdot e^5\cdot e^4 + \big(e^4\big)^2\Big]$$
$$= \big(e^{10}-2\cdot e^9+e^8\big) - \big(e^{10}+2\cdot e^9+e^8\big) = -4\cdot e^9$$

b. $\big(e^3\big)^{-2}\cdot e^5 = e^{-2\times3}\cdot e^5 = e^{-6}\cdot e^5 = e^{-6+5} = e^{-1}$

c. $\big(e^2+e^{-2}\big)\cdot\big(e^2-e^{-2}\big)$
$$= e^2\cdot e^2 - e^2\cdot e^{-2} + e^{-2}\cdot e^2 - e^{-2}\cdot e^{-2}$$
$$= e^4 - e^0 + e^0 - e^{-4} = e^4 - e^{-4}$$

d. $\dfrac{e^6-e^3}{e\cdot e^2} = \dfrac{e^6-e^3}{e^3} = \dfrac{e^6}{e^3} - \dfrac{e^3}{e^3} = e^3-1$

Correction 7

Une video est accessible

a. $\dfrac{2+3\cdot e^x+e^{2x}}{e^{2x}} = \dfrac{2}{e^{2x}} + \dfrac{3\cdot e^x}{e^2x} + \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}}$
$$= 2\cdot e^{-2x} + 3\cdot e^{-x} + 1$$

b. $\big(e^x+1\big)^2 - \big(e^x-1\big)^2$
$$= \Big[\big(e^x+1\big)+\big(e^x-1\big)\Big]\Big[\big(e^x+1\big)-\big(e^x-1\big)\Big]$$
$$= \big(2\cdot e^x\big)\big(2\big) = 4\cdot e^x$$

c. $\dfrac{e^{3x}+2}{e^{3x}-1} = \dfrac{e^{3x}\big(1+2\cdot e^{-3x}\big)}{e^{3x}\big(1-e^{-3x}\big)}$
$$= \frac{1+2\cdot e^{-3x}}{1-e^{-3x}}$$

d. $\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{e^{3x}+e^{2x}} = \dfrac{e^{-2x}\cdot\big(e^{3x}-e^{2x}\big)}{e^{-2x}\cdot\big(e^{3x}+e^{2x}\big)} = \dfrac{e^x-e^0}{e^x+e^0}$
$$= \frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{\big(e^x-1\big)\big(e^x+1\big)}{\big(e^x+1\big)\big(e^x+1\big)}$$
$$= \frac{\big(e^x\big)^2-1^2}{\big(e^x+1\big)^2} = \frac{e^{2x}-1}{\big(e^x+1\big)^2}$$

Correction 8

Une video est accessible

a. De l'équation :
$e^x\cdot\big(e^{2x}-e^2\big) = 0$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$e^x = 0$
pas de solution

$$e^{2x} - e^2 = 0$$
$$e^{2x} = e^2$$
D'après la propriété :
$$\left(e^a{=}e^b \implies a{=}b\right) :$$
$$2x = 2$$
$$x = \frac{2}{2}$$
$$x = 1$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \{1\}$

b. De l'équation :
$\left(e^{3x-1} - 1\right)\left(e^{2-x} - e\right) = 0$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

- $e^{3x-1} - 1 = 0$
  $e^{3x-1} - e^0 = 0$
  $e^{3x-1} = e^0$
  D'après la propriété : $\left(e^a{=}e^b \implies a{=}b\right)$:
  $3x - 1 = 0$
  $3x = 1$
  $x = \frac{1}{3}$
- $e^{2-x} - e = 0$
  $e^{2-x} = e$
  $e^{2-x} = e^1$
  D'après la propriété : $\left(e^a{=}e^b \implies a{=}b\right)$:
  $2 - x = 1$
  $-x = 1 - 2$
  $-x = -1$
  $x = 1$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\,;\,1\right\}$

c. De l'équation :
$x{\cdot}e^x - x = 0$
$x{\cdot}\left(e^x - 1\right) = 0$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x = 0$

$e^x - 1 = 0$
$e^x = 1$
$e^x = e^0$
D'après la propriété : $\left(e^a{=}e^b \implies a{=}b\right)$:
$x = 0$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \{0\}$

Correction 9

a. Etudions l'inéquation :
$e^{2x-4} \geqslant 1$
$e^{2x-4} \geqslant e^0$
De la propriété : $\left(e^a{\geqslant}e^b \implies a{\geqslant}b\right)$
$2x - 4 \geqslant 0$
$2x \geqslant 4$
$x \geqslant \frac{4}{2}$
$x \geqslant 2$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left[2\,;\,+\infty\right[$

b. Etudions l'inéquation :
$e^{x^2-3x+5} < e$
$e^{x^2-3x+5} < e^1$
De la propriété : $\left(e^a{<}e^b \implies a{<}b\right)$
$x^2 - 3x + 5 < 1$
$x^2 - 3x + 5 - 1 < 0$
$x^2 - 3x + 4 < 0$
Le membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-3)^2 - 4{\times}1{\times}4 = 9 - 16 = -7$
Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme a pour signe le signe de son coefficient du terme du second degré : c'est à dire positif.
Ainsi, l'inéquation $x^2{-}3x{+}4{<}0$ n'admet aucune solution.

c. Le carré d'un nombre étant toujours positif ou nul, on en déduit que l'inéquation $\left(e^{3x+1}\right)^2{<}0$ n'admet aucune solution.

Correction 10

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$u(x) = x^2 - 2{\cdot}x + 1$; $v(x) = e^{-2{\cdot}x+6}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 2{\cdot}x - 2$; $v'(x) = -2{\cdot}e^{-2{\cdot}x+6}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)$$
$$= \left(2{\cdot}x - 2\right){\cdot}e^{-2{\cdot}x+6} + \left(x^2 - 2{\cdot}x + 1\right){\cdot}\left(-2{\cdot}e^{-2{\cdot}x+6}\right)$$
$$= \left(2{\cdot}x - 2\right){\cdot}e^{-2{\cdot}x+6} + \left(-2{\cdot}x^2 + 4{\cdot}x - 2\right){\cdot}e^{-2{\cdot}x+6}$$
$$= \left[\left(2{\cdot}x - 2\right) + \left(-2{\cdot}x^2 + 4{\cdot}x - 2\right)\right]{\cdot}e^{-2{\cdot}x+6}$$
$$= \left(2{\cdot}x - 2 - 2{\cdot}x^2 + 4{\cdot}x - 2\right){\cdot}e^{-2{\cdot}x+6}$$
$$= \left(-2{\cdot}x^2 + 6{\cdot}x - 4\right){\cdot}e^{-2{\cdot}x+6}$$

2. La fonction exponentielle étant strictement positive, on en déduit que le signe de la fonction f' ne dépend que du signe de son facteur $-2{\cdot}x^2{+}6{\cdot}x{-}4$. Ce polynôme du second degré admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 6^2 - 4{\times}(-2){\times}(-4) = 36 - 32 = 4$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-6 - 2}{2{\times}(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-6 + 2}{2{\times}(-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le signe de ce polynôme sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-2{\cdot}x^2{+}6{\cdot}x{-}4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, nous obtenons le signe de la fonction f' sur $\left[0{,}7\,;\,6\right]$:

x	0,7		1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations *(sans les ordonnées)* de la fonction f :

x	0,7		1		2		6
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Correction 11

1. Voici les cinq premiers termes de la suite (u_n) :
   - $u_0 = 1$
   - $u_1 = \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{u_0}} = \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{1}} = \dfrac{2}{3}$
   - $u_2 = \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{u_1}} = \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{\frac{2}{3}}} = \dfrac{2}{1+2\times\dfrac{3}{2}}$
     $= \dfrac{2}{1+3} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
   - $u_3 = \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{u_2}} = \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2}{1+2\times 2} = \dfrac{2}{5}$
   - $u_4 = \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{u_3}} = \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{\frac{2}{5}}} = \dfrac{2}{1+2\times\dfrac{5}{2}} = \dfrac{2}{1+5} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

2. On remarque la comparaison : $u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > u_4$
   On peut conjecturer que la suite (u_n) est une suite décroissante.

3. On remarque les expressions des premiers termes de la suite (u_n) :
   $u_0 = \dfrac{2}{2}$; $u_1 = \dfrac{2}{3}$; $u_2 = \dfrac{2}{4}$; $u_3 = \dfrac{2}{5}$; $u_4 = \dfrac{2}{6}$
   On conjecture que le terme de rang n de la suite (u_n) admet pour expression : $u_n = \dfrac{2}{n+2}$

Correction 12

1. On a les manipulations algébriques suivantes :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1-(n+1)}{1+(n+1)} - \frac{1-n}{1+n}$$
$$= \frac{1-n-1}{n+2} - \frac{1-n}{1+n} = \frac{-n}{n+2} - \frac{1-n}{1+n}$$
$$= \frac{-n(1+n)}{(n+2)(1+n)} - \frac{(1-n)(n+2)}{(1+n)(n+2)}$$
$$= \frac{-n-n^2}{(n+2)(1+n)} - \frac{n+2-n^2-2n}{(1+n)(n+2)}$$
$$= \frac{-n-n^2}{(n+2)(1+n)} - \frac{2-n^2-n}{(1+n)(n+2)}$$
$$= \frac{-n-n^2-2+n^2+n}{(1+n)(n+2)} = \frac{-2}{(1+n)(n+2)}$$

2. Pour tout entier naturel n, pour le quotient exprimant la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$:
   - le numérateur est strictement négatif ;
   - le dénominateur du quotient est strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On en déduit le signe du quotient :
$$\frac{-2}{(1+n)(n+2)} < 0$$
$$u_{n+1} - u_n < 0$$
$$u_{n+1} < u_n$$
   Ainsi, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Correction 13

1. Il faut ajouter 8 fois la raison pour passer du terme de rang 7 au terme de rang 15.

2. Ainsi, on a :
$$v_{15} = v_7 + 8\times r$$
$$v_{15} - v_7 = 8\cdot r$$
$$r = \frac{v_{15}-v_7}{8}$$
$$r = \frac{39-13}{8}$$
$$r = \frac{26}{8}$$
$$r = \frac{13}{4}$$
   Pour déterminer le premier terme, on utilise :
$$v_7 = v_0 + 7\cdot r$$
$$13 = v_0 + 7\times\frac{13}{4}$$
$$13 = v_0 + \frac{91}{4}$$
$$v_0 = 13 - \frac{91}{4}$$
$$v_0 = \frac{52}{4} - \frac{91}{4}$$
$$v_0 = -\frac{39}{4}$$
   La suite (v_n) est arithmétique de premier terme $-\dfrac{39}{4}$ et de raison $\dfrac{13}{4}$.

Correction 14

1.
   - Le terme de rang 11 s'exprime par :
$$u_{11} = u_0\times q^{11} = \frac{2^4}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{11} = \frac{2^4}{3}\times\frac{3^{11}}{2^{11}}$$
$$= \frac{2^4\times 3^{11}}{3\times 2^{11}} = \frac{3^{10}}{2^7}$$
   - Le terme de rang 28 s'exprime par :
$$u_{28} = u_0\times q^{28} = \frac{2^4}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{28} = \frac{2^4}{3}\times\frac{3^{28}}{2^{28}}$$
$$= \frac{2^4\times 3^{28}}{3\times 2^{28}} = \frac{3^{27}}{2^{24}}$$

2. a. On a la relation :

$$u_n = \frac{3^8}{2^5}$$

Le terme de rang n s'exprime par :

$$u_0 \times q^n = \frac{3^8}{2^5}$$

$$\frac{2^4}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^8}{2^5}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{\frac{3^8}{2^5}}{\frac{2^4}{3}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^8}{2^5} \cdot \frac{3}{2^4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^8 \times 3}{2^5 \times 2^4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^9}{2^9}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^9$$

On en déduit : $n = 9$

Ainsi, c'est le terme de rang 9 qui a pour valeur $\frac{2^4}{3}$.

b. On a la relation :

$$u_n = \frac{3^{19}}{2^{16}}$$

Le terme de rang n s'exprime par :

$$\frac{2^4}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^{19}}{2^{16}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{\frac{3^{19}}{2^{16}}}{\frac{2^4}{3}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^{19}}{2^{16}} \times \frac{3}{2^4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^{19} \times 3}{2^{16} \times 2^4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^{20}}{2^{20}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{20}$$

On en déduit : $n = 20$.

Ainsi, c'est le terme de rang 20 qui a pour valeur $\frac{3^{19}}{2^{16}}$

Correction 15

1. Pour réduire un nombre de 1 %, il est nécessaire de le multiplier par :

$$1 - \frac{1}{100} = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$

Voici les quatre premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = 50$
- $u_1 = 50 \times 0{,}99 = 49{,}5$
- $u_2 = 49 \times 0{,}99 = 49{,}005$
- $u_2 = 49 \times 0{,}99 = 48{,}51495$

2. a. Deux termes de la suite (u_n) vérifient la relation : $u_{n+1} = u_n \times 0{,}99$.

Ainsi, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,99 et de premier terme 50.

b. Les termes d'une suite géométrique vérifient la relation suivante en fonction de leur rang n :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 50 \times (0{,}99)^n$$

c. Voici l'expression donnant la valeur du 100^e terme de la suite (u_n) :

$$u_{99} = 50 \times (0{,}99)^{100-1} = 50 \times (0{,}99)^{99} \approx 18{,}5\,km$$

3. a. La suite (u_n) étant une suite géométrique de premier terme 50 et de raison 0,99, on en déduit l'expression de la somme de ses n premiers termes :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= 50 \cdot \frac{1-0{,}99^n}{1-0{,}99} = 50 \cdot \frac{1-0{,}99^n}{0{,}01}$$

$$= 50 \cdot (1-0{,}99^n) \times 100 = 5\,000 \cdot (1-0{,}99^n)$$

b. On a le tableau de valeurs suivants :

n	10	100	500	750	1000
u_n	478,1	3169,8	4967,1	4997,3	4999,8

c. On peut conjecturer que la distance parcoure par le coureur va se stabiliser vers 5 000 km lorsque la valeur de n deviendra de plus en plus grande.

Correction 16

- La première figure est un carré de mesure 5 cm. Ainsi, son aire a pour mesure :

$$\mathcal{A}_1 = 5^2 = 25\,cm^2$$

- Pour la seconde figure, notons a_n l'aire du $n^{\text{ième}}$ carré composant la figure. On a :

  - Le premier carré a pour aire :

$$a_1 = 3^2 = 9\,cm^2$$

  - Pour le second carré, son aire vérifie :

$$a_2 = \left(3 \times \frac{4}{5}\right)^2 = 9 \times \frac{16}{25} = a_1 \times \frac{16}{25}$$

  - Pour le troisième carré, son aire vérifie :

$$a_3 = \left[\left(3 \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{4}{5}\right]^2 = \left(3 \times \frac{4}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = a_2 \times \frac{16}{25}$$

Ainsi, la suite (a_n) est une suite géométrique de premier terme 9 et de raison $\frac{16}{25}$

Notons S_n la somme des n premiers carrés composant la figure. On a :

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_n.$$

La suite (a_n) ayant une raison différente de 1, d'après la formule de la somme des termes d'une suite géométrique , on a :

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n}{1 - \frac{16}{25}}$$

$$= 9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n}{\frac{9}{25}} = 9 \cdot \left[1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n\right] \cdot \frac{25}{9}$$

$$= 25 \cdot \left[1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n\right]$$

Or, on a la comparaison suivante :

$$-\left(\frac{16}{25}\right)^n < 0$$

$$1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n < 1$$

$$25 \cdot \left[1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n\right] < 25$$

$$S_n < 25$$

On vient de montrer que l'aire de la première figure sera toujours plus grande que l'aire de la seconde figure.

Correction 17

1. - Dans le triangle ABC rectangle en B.

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos(45^o) = \frac{AB}{2}$$

$$AB = 2 \cdot \cos(45^o)$$

$$AB = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AB = \sqrt{2}$$

$$\sin\widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$$
$$\cos(45^o) = \frac{BC}{2}$$
$$BC = 2\cdot\cos(45^o)$$
$$BC = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$BC = \sqrt{2}$$

- Dans le triangle ADE rectangle en D.

$$\cos\widehat{DAE} = \frac{AD}{AE}$$
$$\cos(30^o) = \frac{AD}{4}$$
$$AD = 4\cdot\cos(30^o)$$
$$AD = 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$AD = 2\cdot\sqrt{3}$$

$$\sin\widehat{DAE} = \frac{DE}{AE}$$
$$\sin(30^o) = \frac{DE}{4}$$
$$DE = 4\cdot\sin(30^o)$$
$$DE = 4\times\frac{1}{2}$$
$$DE = 2$$

2. La distributivité du produit scalaire sur l'addition vectorielle donne :
$$(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$
$$= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}$$
Déterminons la valeur de chacun de ces produits scalaires :
   - Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ étant colinéaires et de même sens : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = AD\times AB$
   - Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ étant orthogonaux : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$
   - Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ étant orthogonaux : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$
   - Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de sens opposé : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC} = -DE\times BC$

   On en déduit :
$$(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = AD\times AB - DE\times BC$$

3. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$
$$= AD\times AB - DE\times BC = 2\cdot\sqrt{3}\times\sqrt{2} - 2\cdot\sqrt{2}$$
$$= 2\cdot\sqrt{6} - 2\cdot\sqrt{2}$$

Correction 18

1. On a les coordonnées suivantes :
$$D(0\,;0) \quad ; \quad C(1\,;0) \quad ; \quad A\Big(0\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) \quad ; \quad B\Big(1\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$$

2. On a les coordonnées suivantes de vecteurs :
$$\overrightarrow{AC}\Big(1\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) \quad ; \quad \overrightarrow{IB}\Big(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$$
Ainsi, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IB}$ a pour valeur :
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IB} = 1\times\frac{1}{2} + \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{(\sqrt{2})^2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont orthogonaux : les droites (AC) et (IB) sont perpendiculaires.

Voici la même démonstration mais en utilisant seulement les vecteurs et le produit scalaire *(pas les coordonnées)*

Pour montrer que les deux droites (AC) et (BI) sont perpendiculaires, nous allons étudier le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BI}$.
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BI} = \big(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\big)\cdot\big(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}\big)$$
$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CI}$$
En utilisant les angles droits du rectangle :
$$= 0 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} + 0$$
En utilisant la colinéarité des vecteurs mis en jeux dans ces produits scalaires :
$$= -AB\times CI + BC\times BC = -a\times\frac{a}{2} + \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}a\Big)^2$$
$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{2}{4}a^2 = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$
Le produit scalaire est nul et aucun de ces deux vecteurs est nul ; les droites (AC) et (BI) sont perpendiculaires.

Correction 19

1. Déterminons les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$
   - $\overrightarrow{BA}(x_A - x_B\,;y_A - y_B) = (-2-1\,;3-(-4))$
     $= (-3\,;7)$
   - $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B\,;y_C - y_B) = (0-1\,;\,-2-(-4))$
     $= (-1\,;2)$

   On a ainsi les valeurs suivantes :
   - $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-3)\times(-1) + 7\times 2 = 17$
   - $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-3)^2+7^2} = \sqrt{58}$
   - $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$

2. Le produit scalaire est donnée également à l'aide de la formule suivante :
$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos\widehat{ABC}$$
$$17 = \sqrt{58}\times\sqrt{5}\times\cos\widehat{ABC}$$
$$\cos\widehat{ABC} = \frac{17}{\sqrt{58}\times\sqrt{5}}$$
Les fonctions trigonométriques inverses permettent d'obtenir la valeur de l'angle géométrique :
$$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\Big(\frac{17}{\sqrt{58}\times\sqrt{5}}\Big) \approx 3{,}37^o$$

Correction 20

1. La vecteur $\overrightarrow{n}(-2\,;1)$, la droite (d) admet une équation cartésienne de la forme :

$$-2{\cdot}x+y+c=0 \quad c\in\mathbb{R}$$

Le point A appartenant à la droite (d), ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de cette droite :

$$\begin{aligned}-2{\cdot}x_A+y_A+c&=0\\ -2\times(-2)+1+c&=0\\ 4+1+c&=0\\ 5+c&=0\\ c&=-5\end{aligned}$$

La droite (d) admet l'équation cartésienne :

$$-2{\cdot}x+y-5=0$$

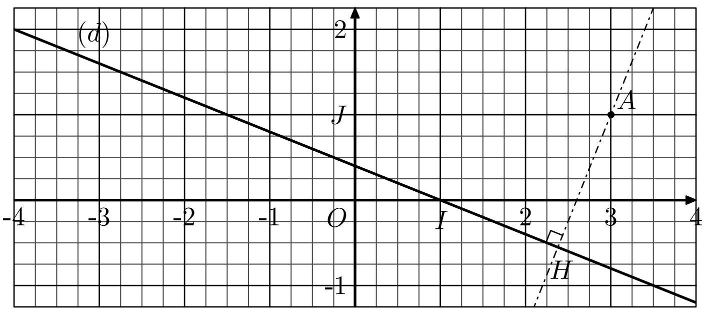
2. La droite (d) admettant l'équation cartésienne :

$$x-4{\cdot}y+3=0$$

- On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n'}(1\,;-4)$ est un vecteur normal à la droite (d).
- Le vecteur $\overrightarrow{u}(4\,;1)$ est un vecteur orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n'}$:
  $\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{u}=1\times4+(-4)\times1=4-4=0$
  On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d).
- Le point $B(-3\,;0)$ est un point de la droite (d') car :
  $x_B-4{\cdot}y_B+3=-3-4\times0+3=-3+0+3=0$

Correction 21

1. Voici le point H représenté :



2. Plusieurs méthodes sont présentées ici pour déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal sur la droite (d) :

- **1^{re} méhotde :** le point H est le point d'intersection de la droite (d) et de la droite passant par le point A et perpendiculaire à (d) :
  De l'équation cartésienne de la droite (d), on en déduit qu'elle admet le vecteur $\overrightarrow{n}(2\,;5)$ pour vecteur normal et le vecteur $\overrightarrow{u}(-5\,;2)$ pour vecteur directeur.
  Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal à la droite (AH).
  La droite (AH) admet une équation cartésienne de la forme :
  $$-5{\cdot}x+2{\cdot}y+c=0 \quad \text{où } c\in\mathbb{R}$$
  Les coordonnées du point A vérifient cette équation :
  $$\begin{aligned}-5{\cdot}x_A+2{\cdot}y_A+c&=0\\ -5\times3+2\times1+c&=0\\ -15+2+c&=0\\ c&=13\end{aligned}$$
  L'équation cartésienne de la droite (d) est :
  $$-5{\cdot}x+2{\cdot}y+13=0$$
  Le point H intersection de la droite (d) et de la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (d) :
  $$\begin{cases}2{\cdot}x+5{\cdot}y-2=0\\ -5{\cdot}x+2{\cdot}y+13=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}10{\cdot}x+25{\cdot}y-10=0\\ -10{\cdot}x+4{\cdot}y+26=0\end{cases}$$
  En additionnant membres à membres ces deux équations, on obtient :
  $$\begin{aligned}0{\cdot}x+29{\cdot}y+16&=0\\ 29{\cdot}y&=-16\\ y&=-\frac{16}{29}\end{aligned}$$
  On utilise l'équation cartésienne de la droite (d) pour déterminer l'abscisse du point H :
  $$\begin{aligned}2{\cdot}x_H+5{\cdot}y_H-2&=0\\ 2{\cdot}x_H+5{\cdot}\Big(-\frac{16}{29}\Big)-2&=0\\ 2{\cdot}x_H-\frac{80}{29})-2&=0\\ 2{\cdot}x_H-\frac{138}{29}&=0\\ 2{\cdot}x_H&=\frac{138}{29}\\ x_H&=\frac{69}{29}\end{aligned}$$
  Le point H a pour coordonnées : $H\Big(\frac{69}{29}\,;-\frac{16}{29}\Big)$
- **2^{nd} méhotde :** Le point H est l'unique point de (d) tel que les vecteurs $\overrightarrow{AU}$ et $\overrightarrow{n}$, normal à (d), soit colinéaire.
  D'après son équation cartésienne, le vecteur $\overrightarrow{n}(2\,;5)$ est un vecteur normal à la droite (d).
  En notant x l'abscisse du point H et appartenant à la droite (d), ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne :
  $$\begin{aligned}2{\cdot}x+5{\cdot}y-2&=0\\ 5{\cdot}y&=-2{\cdot}x+2\\ y&=-\frac{2}{5}{\cdot}x+\frac{2}{5}\end{aligned}$$
  Le point H a pour coordonnées : $H\Big(x\,;-\frac{2}{5}{\cdot}x+\frac{2}{5}\Big)$
  Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées :
  $$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}(x_H-x_A\,;y_H-y_A)&=\Big(x-3\,;-\frac{2}{5}{\cdot}x+\frac{2}{5}-1\Big)\\ &=\Big(x-3\,;-\frac{2}{5}{\cdot}x-\frac{3}{5}\Big)\end{aligned}$$
  Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ étant colinéaires, d'après le critère de colinéarité, on a :
  $$\begin{aligned}x{\cdot}y'-x'{\cdot}y&=0\\ 2{\cdot}\Big(-\frac{2}{5}{\cdot}x-\frac{3}{5}\Big)-(x-3){\cdot}5&=0\\ -\frac{4}{5}{\cdot}x-\frac{6}{5}-5{\cdot}x+15&=0\\ \Big(-\frac{4}{5}\cdot-\frac{25}{5}{\cdot}x\Big)+\Big(-\frac{6}{5}+\frac{75}{5}\Big)&=0\\ -\frac{29}{5}{\cdot}x+\frac{69}{5}\Big)&=0\\ -\frac{29}{5}{\cdot}x&=-\frac{69}{5}\\ x&=-\frac{69}{5}\times\Big(-\frac{5}{29}\Big)\\ x&=\frac{69}{29}\end{aligned}$$
  L'ordonnée du point H a pour valeur :

$$y_H = -\frac{2}{5}\cdot x + \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}\times\frac{69}{29} + \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}\times\left(\frac{69}{29} - 1\right)$$
$$= -\frac{2}{5}\times\frac{40}{29} = -\frac{16}{29}$$

Le point H a pour coordonnées : $H\left(\frac{69}{29}\,;-\frac{16}{29}\right)$

Correction 22

- En utilisant la formule du cours, le cercle $\mathscr{C}$ admet pour équation cartésienne :

$$x^2+y^2+\left(-2\cdot x_A\right)\cdot x+\left(-2\cdot y_A\right)\cdot y+\left({x_A}^2+{y_A}^2-r^2 3\right)=0$$
$$x^2+y^2+\left(-2\times 2\right)\cdot x+\left(-2\times 1\right)\cdot y+\left(2^2+1^2-4^2\right)=0$$
$$x^2+y^2-4\cdot x-2\cdot y+\left(4+1-16\right)=0$$
$$x^2+y^2-4\cdot x-2\cdot y-11=0$$

- En retrouvant cette équation cartésienne par la définition d'un cercle :
  Soit $M(x\,;y)$ un point du cercle $\mathscr{C}$. Le point M est à une distance de 4 du centre A :

$$AM = 4$$
$$AM^2 = 4^2$$
$$\left[\sqrt{\left(x-x_A\right)^2+\left(y-y_A\right)^2}\right]^2 = 16$$
$$\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2 = 16$$
$$x^2-4\cdot x+4+y^2-2\cdot y+1-16=0$$
$$x^2+y^2-4\cdot x-2\cdot y-11=06$$

Correction 23

1. a. $\mathcal{P}_A(B) = 0{,}7$
   b. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$
2. a. $\mathcal{P}(A\cap B) = \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(B) = 0{,}4\times 0{,}7 = 0{,}28$
   b. $\mathcal{P}(\overline{A}\cap B) = \mathcal{P}(\overline{A})\times\mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}6\times 0{,}2 = 0{,}12$

Correction 24

a. $\mathcal{P}(A) = 1-\mathcal{P}(\overline{A}) = 1-0{,}6 = 0{,}4$

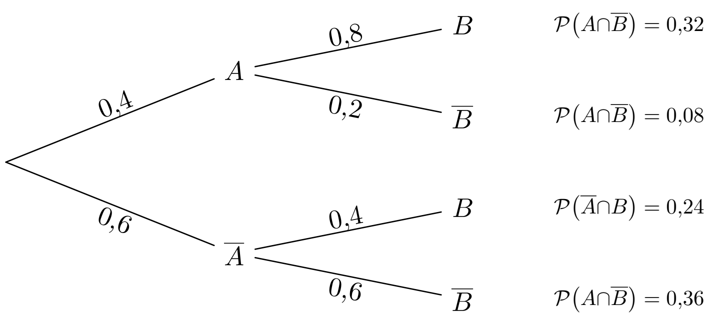
b. $\mathcal{P}_A(B) = 1-\mathcal{P}_A(\overline{B}) = 1-0{,}2 = 0{,}8$

c. $\mathcal{P}(A\cap B) = \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(B) = 0{,}4\times 0{,}8 = 0{,}32$

d. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = \dfrac{\mathcal{P}(\overline{A}\cap B)}{\mathcal{P}(\overline{A})} = \dfrac{0{,}24}{0{,}6} = 0{,}4$

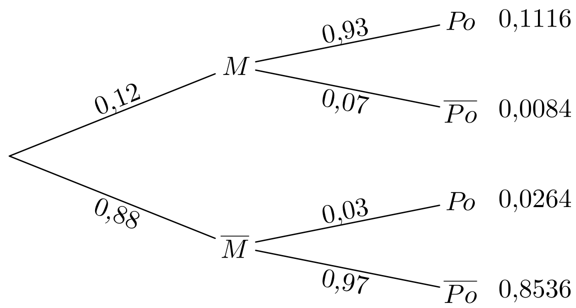
e. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1-\mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = 1-0{,}4 = 0{,}6$

f. $\mathcal{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) = \mathcal{P}(\overline{A})\times\mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}6\times 0{,}6 = 0{,}36$



Correction 25

1.



2. - $A = M\cap Po$. Or on sait que : $\mathcal{P}_M(Po) = \dfrac{\mathcal{P}(M\cap Po)}{\mathcal{P}(M)}$.
     D'après l'arbre de probabilité, on a :
     $\mathcal{P}(M\cap Po) = \mathcal{P}_M(Po)\times\mathcal{P}(M)$
     $= 0{,}93\times 0{,}12 = 0{,}1116$
   - $B = \overline{M}\cap Po$. Or, on a la formule :
     $\mathcal{P}_{\overline{M}}(Po) = \dfrac{\mathcal{P}(\overline{M}\cap Po)}{\mathcal{P}(\overline{M})}$
     D'après l'arbre de probabilité, on a :
     $\mathcal{P}(\overline{M}\cap Po) = \mathcal{P}_{\overline{M}}(Po)\times\mathcal{P}(\overline{M}) = 0{,}88\times 0{,}03 = 0{,}0264$
   - $C = M\cap\overline{Po}$. On a la probabilité conditionnelle suivante :
     $\mathcal{P}_M(\overline{Po}) = \dfrac{\mathcal{P}(M\cap\overline{Po})}{\mathcal{P}(M)}$
     On en déduit :
     $\mathcal{P}(M\cap\overline{Po}) = \mathcal{P}_M(\overline{Po})\times\mathcal{P}(M)$
     $= 0{,}12\times 0{,}07 = 0{,}0084$

3. Les événements M et $\overline{M}$ sont complémentaires l'un de l'autre. Ce qui permet d'écrire l'événement Po comme réunion disjointes des événements $Po\cap M$ et $Po\cap\overline{M}$.
   Ce qui permet d'écrire :
   $\mathcal{P}(Po) = \mathcal{P}\big[(Po\cap M)\cup(Po\cap\overline{M})\big]$
   $= \mathcal{P}(Po\cap M)+\mathcal{P}(Po\cap\overline{M})$
   $= 0{,}1116+0{,}0264 = 0{,}138$
   La probabilité que le test soit négatif est de :
   $P(\overline{Po}) = 1-P(Po) = 1-0{,}138 = 0{,}862$

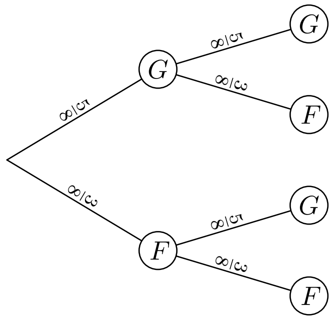
4. a. La probabilité qu'un mouton ne soit pas malade sachant que le test est positif se calcule par :
   $\mathcal{P}_{Po}(\overline{M}) = \dfrac{\mathcal{P}(\overline{M}\cap Po)}{\mathcal{P}(Po)}$
   D'après la question 3. et 2., on déduit que :
   $\mathcal{P}_{Po}(\overline{M}) = \dfrac{0{,}0264}{0{,}138} \approx 0{,}1913 \approx 0{,}191$

   b. La probabilité qu'un mouton soit malade sachant qu'il a un test négatif est la probabilité conditionnelle suivante :
   $\mathcal{P}_{\overline{Po}}(M) = \dfrac{\mathcal{P}(\overline{Po}\cap M)}{\mathcal{P}(\overline{Po})}$
   A l'aide des question 2. et 3., on déduit :
   $\mathcal{P}_{\overline{Po}}(M) = \dfrac{0{,}0084}{0{,}862} \approx 0{,}00974 \approx 0{,}010$

Correction 26

Une video est accessible

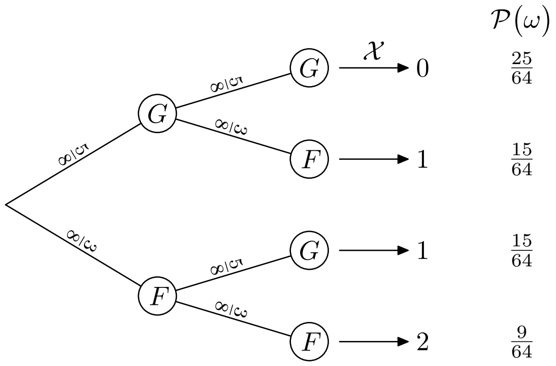
1. Cette expérience aléatoire donne l'arbre pondéré ci-dessous :



2. a. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ peut prendre les valeurs 0, 1 et 2.

Pour dresser la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$, on complète l'arbre de probabilité avec :

- la valeur associée par la variable aléatoire $\mathcal{X}$ à chacune des branches de l'arbre ;
- la probabilité de chacune des branches.



La loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ est présentée dans le tableau ci-dessous :

k	0	1	2
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	$\dfrac{25}{64}$	$\dfrac{30}{64}$	$\dfrac{9}{64}$

b. L'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour valeur :

$$E(\mathcal{X}) = 0\times\frac{25}{64}+1\times\frac{30}{64}+2\times\frac{9}{64} = \frac{30}{64}+\frac{18}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$$

