1 Calcul algébrique, équations

Exercice 1 :

Compléter les égalités suivantes de sorte qu'elles soient vérifiées pour tout nombre réel x :

1. $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$.
2. $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$.
3. $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$.
4. $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = x^2 - 5$.
5. $x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{4}{9} = (x - \frac{2}{3})^2$.

Exercice 2 :

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la bonne réponse.

1. Une expression factorisée de $x^2 - 15x + 14$ est :

   a. $x(x-15)+14$ **b.** $(x-7)(x-2)$ $\boxed{\textbf{c. } (x-1)(x-14)}$.

⊠ : L'expression a. est égale à $x^2 - 15x + 14$ mais n'est pas factorisée.

2. Une expression développée de $(2x-1)(-x+3)$ est :

   a. $5x-3$ **b.** $-2x^2+5x-3$ $\boxed{\textbf{c. } -2x^2+7x-3}$.

3. Une expression factorisée de $(3x+1)^2 - 25$ est :

   $\boxed{\textbf{a. } 3(3x-4)(x+2)}$ **b.** $9x^2+6x-24$ **c.** $(3x-4)^2$.

4. Une expression développée de $2(x-1)^2 - 3$ est :

   a. $4x^2-8x+1$ **b.** $2x^2-5$ $\boxed{\textbf{c. } 2x^2-4x-1}$.

5. Une expression égale à $2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)$ est :

   a. $(2x-1)(2x+4)$ $\boxed{\textbf{b. } 2x^2+3x-2}$ **c.** $x^2+\frac{3}{2}x-1$.

Exercice 3 :

(1)

$$2x+3 = 4(x-2)$$
$$\Leftrightarrow 2x+3 = 4x-8$$
$$\Leftrightarrow -2x = -11$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{11}{2}}$$

(2)

$$(4x-1)(2x+7) = 0$$
$$4x-1 = 0 \text{ ou } 2x+7 = 0$$
$$\boxed{x = \tfrac{1}{4} \text{ ou } x = -\tfrac{7}{2}}.$$

(3)

$$3x^2 - 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 3$$
$$\boxed{x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}}.$$

(4)

$$x^2 + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = -5$$

Mais le carré d'un nombre réel est toujours positif.
L'équation n'admet pas de solution.

(5)

$$3x - 7 > 8x + 3$$
$$\Leftrightarrow -5x > 10$$
$$\Leftrightarrow x < -2$$

D'où $\boxed{x \in]-\infty\,;-2[}$.

(6)

$$\frac{8}{3}x - 2 \leqslant 2 - 2(x+4)$$
$$\Leftrightarrow \frac{8}{3}x - 2 \leqslant 2 - 2x - 8$$
$$\Leftrightarrow \frac{8}{3}x + 2x \leqslant 2 - 8 + 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{14}{3}x \leqslant -4$$
$$\Leftrightarrow x \leqslant -4 \times \frac{3}{14} = -\frac{6}{7}$$

D'où $\boxed{x \in \left]-\infty\,; -\frac{6}{7}\right]}$.

Exercice 4 :

Attention à la rédaction. Montrer, pour tout nombre réel x, les égalités suivantes :

1. $(2x-1)^2-4=4x^2-4x-3$;

   Pour tout réel x, $(2x-1)^2-4=4x^2-4x+1-4=4x^2-4x-3$.

   On a bien, pour tout réel x, $\boxed{(2x-1)^2-4=4x^2-4x-3}$.

2. $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$;

   Pour tout réel x, on a $(x-1)(x^2+x+1)=x^3+x^2+x-x^2-x-1=x^3-1$.

   On a bien, pour tout réel x, $\boxed{x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)}$.

3. $x^2+(x+1)^2=\dfrac{(2x+1)^2+1}{2}$.

   D'une part, on a $x^2+(x+1)^2=x^2+x^2+2x+1=2x^2+2x+1$,

   D'autre part, on a $\dfrac{(2x+1)^2+1}{2}=\dfrac{4x^2+4x+1+1}{2}=\dfrac{4x^2+4x+2}{2}=2x^2+2x+1$.

   On a bien, pour tout réel x, $\boxed{x^2+(x+1)^2=\dfrac{(2x+1)^2+1}{2}}$.

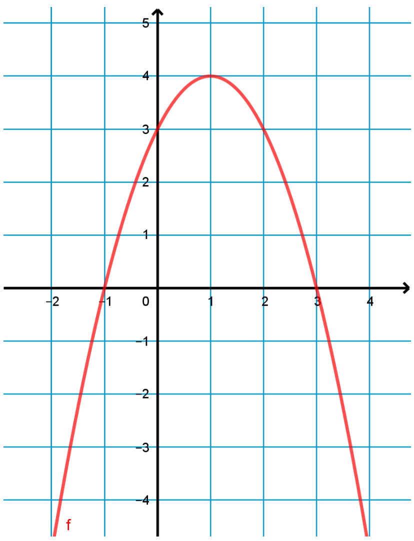
2 Fonctions, étude graphique

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;\,4]$, dont on donne la représentation graphique ci-contre.

1. Dresser le tableau de variations de f.

x	-2		1		4
$f(x)$	-5	↗	4	↘	-5



2. $f(x)=0$ pour $\boxed{x=-1 \text{ ou } x=3}$.
3. $f(x)\leqslant 3$ pour $\boxed{x\in[-2\,;\,0]\cup[2\,;\,4]}$.
4. $f(x)$ est strictement positif pour $\boxed{x\in]-1\,;\,3[}$.
5. Établir le tableau de signe de $f(x)$:

x	-2		-1		3		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 6 :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I=[-7\,;\,6]$ dont la courbe est donnée ci-dessous.

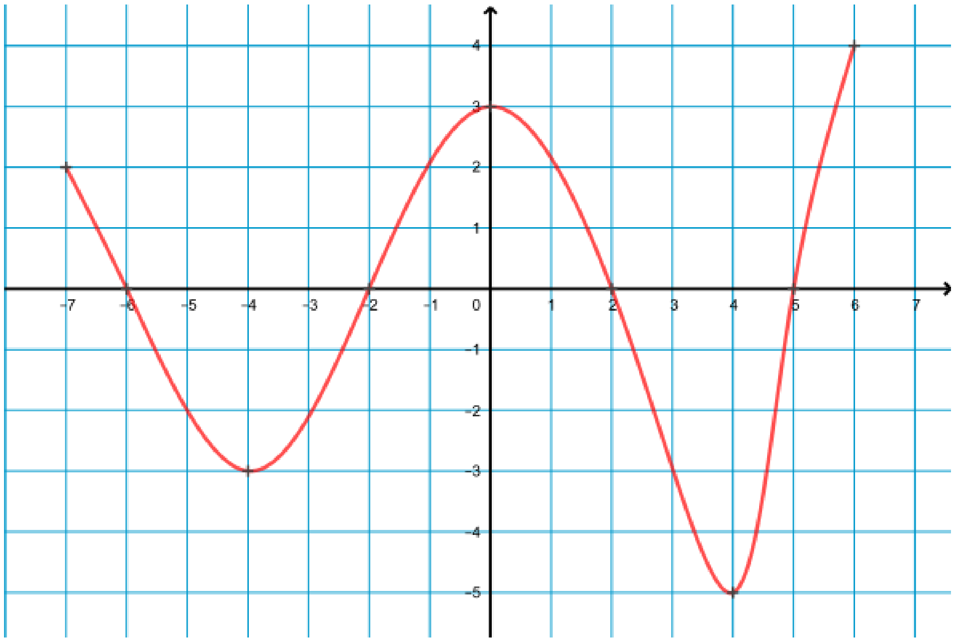
1. Dresser le tableau de signes de la fonction g sur I :

x	-7		-6		-2		2		5		6
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Dresser le tableau de variations complet de g sur I.

x	-7		-4		0		4		6
$g(x)$	2	↘	-3	↗	3	↘	-5	↗	4

3. Le minimum de g est -5. Il est atteint pour $x = 4$.
   Le maximum de g est 4. Il est atteint pour $x = 6$.



Exercice 7 :
Soit f la fonction définie sur $[-8\,;\,7]$ dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	-8		-2		0		7
$f(x)$	5	↘	1	↗	8	↘	-5

1. L'image de -2 par f est 1. (On peut écrire $\boxed{f(-2) = 1}$.
2. -8 n'admet pas d'antécédent par f car le minimum de f est -5 et $-8 < -5$.
3. L'équation $f(x) = 0$ admet une solution a qui appartient à l'intervalle $]0\,;\,7[$.
4. 7 est un nombre qui a exactement deux antécédents par f.
   Tout nombre appartenant à l'intervalle $]5\,;\,8[$ possède deux antécédents par f.
5. Le minimum de f est -5. Il est atteint pour $x = 7$.
   Le maximum de f est 8. Il est atteint pour $x = 0$.
6. Proposer une courbe représentative possible pour la fonction f.

3 Fonctions usuelles

Exercice 8 :
On note c la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$ par $c(x) = x^2$ et $\mathscr{P}$ sa courbe dans un repère orthogonal.
Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

1. La courbe $\mathscr{P}$ est une hyperbole.
   FAUX : La courbe $\mathscr{P}$ est une parabole.
2. La fonction c est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
   VRAI
3. La fonction c est impaire.
   FAUX : la fonction c est paire. En effet, pour tout réel x, $c(x) = c(-x)$.
   (On vérifie bien : $c(-x) = (-x)^2 = x^2 = c(x)$)
4. $\mathscr{P}$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
   VRAI : c est paire, donc, sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
5. Si a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b \leqslant 0$, alors $a^2 \leqslant b^2$.
   FAUX : La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$, elle inverse donc l'ordre. Ainsi, si a et b sont des réels négatifs tels que $a \leqslant b$, alors $a^2 \geqslant b^2$.

Exercice 9 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 5$ et h un nombre quelconque.
   (a) $f(-3) = 2 \times (-3) - 5 = \underline{-11}$.
   (b) $f(3+h) = 2(3+h) - 5 = 6 + 2h - 5 = \underline{2h+1}$.
   (c) $f(-2+h) = 2(-2+h) - 5 = -4 + 2h - 5 = \underline{2h-9}$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3x + 1$ et h un nombre réel quelconque.
   (a) $g(3+h) = (3+h)^2 - 3(3+h) + 1 = 9 + 6h + h^2 - 9 - 3h + 1 = \underline{h^2 + 3h + 1}$.
   (b) $g(-2+h) = (-2+h)^2 - 3(-2+h) + 1 = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h + 1 = \underline{h^2 - 7h + 11}$.
   (c) Le point $A(3\,;\,1)$ appartient à la courbe représentative de g si et seulement si $g(3) = 1$.
   Or $g(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 1 = 9 - 9 + 1 = 1$. $\boxed{A \text{ appartient donc bien à la courbe de } g}$.

Exercice 10 :
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 24$

1. Déterminer les images par f des entiers 0 ; 2 et 10.
   $f(0) = -24$, $f(2) = -14$ et $f(10) = 26$
2. Soit n un entier naturel.
   (a) $f(n) = \underline{5n-24}$.
   (b) $f(n+1) = 5(n+1) - 24 = 5n + 5 - 24 = \underline{5n-19}$.
   (c) $f(n+1) - f(n) = 5n - 19 - (5n-24) = 5n - 19 - 5n + 24 = \underline{5}$.
   Remarque : $f(n+1) - f(n)$ ne dépend pas de n : la différence vaut 5, quel que soit n.

Exercice 11 :
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si f est une fonction décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors on a $f(100) \leqslant f(50)$.
   VRAI : 100 et 50 sont deux réels de $[0\,;\,+\infty[$, avec $100 \geqslant 50$. Or, sur $[0\,;\,+\infty[$, f est décroissante, elle inverse donc l'ordre. Ainsi $f(100) \leqslant f(50)$.
2. Si f est une fonction croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors on a $f(1{,}99) \leqslant f(2)$.
   VRAI : 1,99 et 2 sont deux réels de $[0\,;\,+\infty[$, avec $1{,}99 \leqslant 2$. Or, sur $[0\,;\,+\infty[$, f est croissante, elle conserve donc l'ordre. Ainsi $f(1{,}99) \leqslant f(2)$.

3. Si f est une fonction croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors, pour tout entier naturel n, $f(n) \geqslant f(n+1)$.
   FAUX : n et $n+1$ sont entiers naturels, ils appartiennent donc à $[0\,;\,+\infty[$, et $n \leqslant n+1$. Or, sur $[0\,;\,+\infty[$, f est croissante, elle conserve donc l'ordre. Ainsi $f(n) \leqslant f(n+1)$.
4. Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - 5x$.
   Pour tout entier naturel n, on a : $f(n) \leqslant f(n+1)$.
   FAUX : Pour tout entier naturel n, on a : $f(n) \geqslant f(n+1)$. En effet :
   $f(n) = 2 - 5n$ et $f(n+1) = 2 - 5(n+1) = 2 - 5n - 5 = -3 - 5n$.
   On a $f(n) - f(n+1) = 2 - 5n - (-3 - 5n) = 2 - 5n + 3 + 5n = 5$.
   Donc, pour tout entier naturel n, $f(n) - f(n+1) \geqslant 0$, ce qui est équivalent à $f(n) \geqslant f(n+1)$.
   (*Remarque* : On aurait pu aussi remarquer que f est décroissante et inverse l'ordre).

4 Étude de signe, Inéquation

Exercice 12 :
On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -4x + 6, \qquad g(x) = 2x - 3 \qquad \text{et} \qquad h(x) = -3x + 2$$

Associer à chaque fonction son tableau de signes et sa représentation graphique.

Tableau 1

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

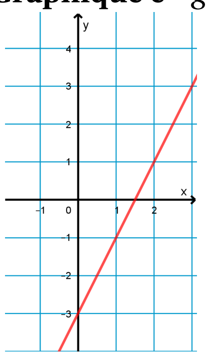
Tableau 2

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

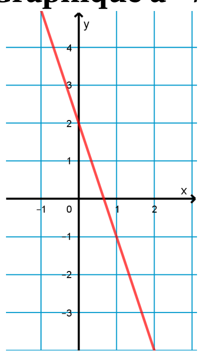
Tableau 3

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

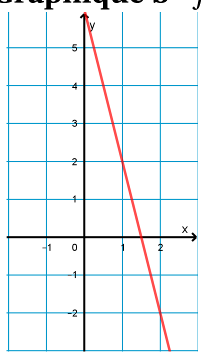
Graphique c - g



Graphique a - h



Graphique b - f



Exercice 13 :

$$\begin{aligned}
& -2(3-7x) < 5x + 3(6x-2) - 2 \\
\Leftrightarrow\quad & -6 + 14x < 5x + 18x - 6 - 2 \\
\Leftrightarrow\quad & -6 + 14x < 23x - 8 \\
\Leftrightarrow\quad & 14x - 23x < -8 + 6 \\
\Leftrightarrow\quad & -9x < -2 \\
\Leftrightarrow\quad & x > \frac{2}{9} \\
\Leftrightarrow\quad & \boxed{x \in \left]\frac{2}{9}\,;\,+\infty\right[}
\end{aligned}$$

Exercice 14 :

Étudions le signe des fonctions suivantes à l'aide d'un tableau :

1. $f(x) = (3x-1)(2-x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f est positive sur $\left[\frac{1}{3}\ ;\ 2\right]$ et négative sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right] \cup [2\ ;\ +\infty[$.

2. $g(x) = \dfrac{3x+1}{4x-1}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x-1$		$-$		$-$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

g est positive sur $\left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$ et négative sur $\left[-\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{4}\right[$.

3. $h(x) = 3x(7-2x)(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$7-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

h est positive sur $]-\infty\ ;\ 0] \cup \left[1\ ;\ \frac{7}{2}\right]$ et négative sur $[0\ ;\ 1] \cup \left[\frac{7}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

4. $f'(x) = \dfrac{-2}{(2x+3)^2}$

   -2 est négatif;

   $(2x+3)^2$ est un carré donc est toujours positif et s'annule pour $x = -\frac{3}{2}$.

   Comme le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif, on en déduit que, pour tout réel x différent de $-\frac{3}{2}$, $f'(x)$ est négatif.