Exercice 1

Le tableau ci-dessous représente le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-4		-2		-1		2		$+\infty$
Signe de f'											
Variation de f	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3
Signes de f											

Compléter les lignes du signe de la fonction f' et du signe de la fonction f.

Exercice 2

On considère une fonction f définie sur $[-3\,;5]$ dont la dérivée admet le tableau de signes suivant :

x	-3		-1		2		5
Signe de f'		$+$	0	-	0	$+$	
Variation de f							

On a les valeurs et relations suivantes :

- $f(-1) = 3$
- $f(5) = -2\cdot f(-1)$
- $f(-3) = f(5) + 5$
- $f(2) = f(-1)\cdot f(5)$

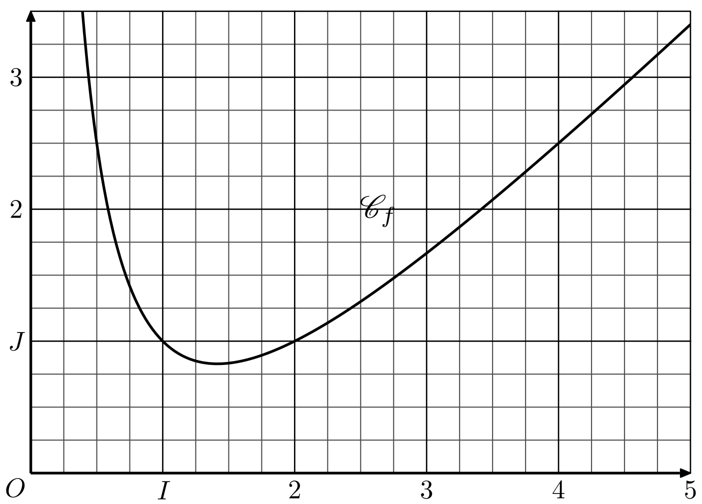
Dans le tableau précédent, compléter la ligne des variations de la fonction f.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par la relation :

$$f(x) = x + \frac{2}{x} - 2$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1. Montrer que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est donnée par :
   $$f'(x) = \frac{x^2-2}{x^2}$$

2. On souhaite déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

   a. Donner le coefficient directeur de la tangente (T). Justifier votre démarche.

   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T).

   c. Tracer la droite (T) dans le repère ci-dessus.

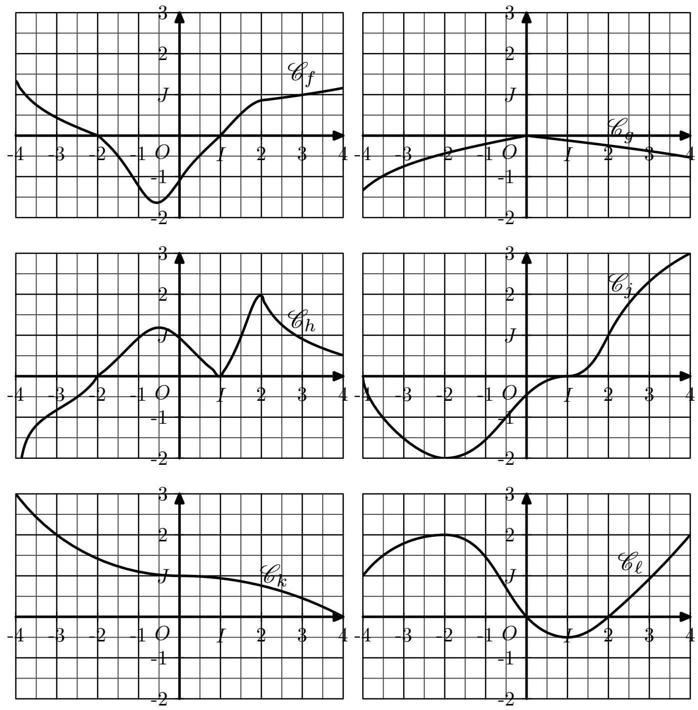
3. On considère la droite (d) d'équation réduite :
   $$(d) : \ y = \frac{1}{2}\cdot x$$

   a. Sur $]0\,;+\infty[$, étudier le signe de l'expression :
   $$f(x) - \frac{1}{2}\cdot x$$

   b. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d).

Exercice 4

On considère les six fonctions f, g, h, j, k, l définies sur $[-4\,;4]$ dont les courbes représentatives sont données ci-dessous :



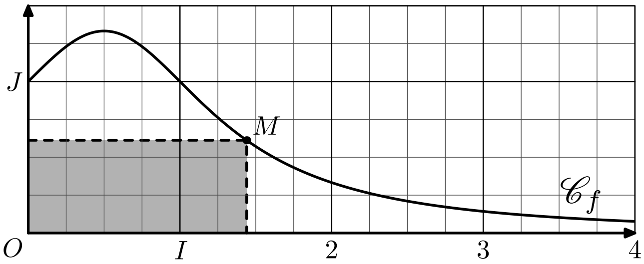
Associer à trois de ces fonctions leurs trois dérivées respectives.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



On considère un point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et le rectangle représenté ci-dessus où :

- les points O et M en sont deux sommets opposés.
- ses côtés sont parallèles aux axes du repère.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ce rectangle en fonction de la valeur de x.

1. Donner l'expression de la fonction $\mathcal{A}$.

2. a. Montrer que la fonction $\mathcal{A}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{A}$ admet pour expression :
$$\mathcal{A}'(x) = \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2-x+1)^2}$$
b. Dresser le tableau de signes de la fonction $\mathcal{A}'$.
c. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.

3. Justifier que l'aire du rectangle est maximale lorsque le point M a pour abscisse 1.

Exercice 6

Simplifier les expressions suivantes :

a. $(e^5-e^4)^2-(e^5+e^4)^2$ b. $(e^3)^{-2}\cdot e^5$

c. $(e^2+e^{-2})\cdot(e^2-e^{-2})$ d. $\dfrac{e^6-e^3}{e\cdot e^2}$

Exercice 7

Etablir les égalités suivantes :

a. $\dfrac{2+3\cdot e^x+e^{2x}}{e^{2x}} = 2\cdot e^{-2x}+3\cdot e^{-x}+1$

b. $(e^x+1)^2-(e^x-1)^2 = 4\cdot e^x$

c. $\dfrac{e^{3x}+2}{e^{3x}-1} = \dfrac{1+2\cdot e^{-3x}}{1-e^{-3x}}$ d. $\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{e^{3x}+e^{2x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{(e^x+1)^2}$

Exercice 8

Résoudre les équations :

a. $e^x\cdot(e^{2x}-e^2)=0$ b. $(e^{3x-1}-1)(e^{2-x}-e)=0$

c. $x\cdot e^x-x=0$

Exercice 9

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $e^{2x-4}\geqslant 1$ b. $e^{x^2-3x+5}<e$ c. $(e^{3x+1})^2<0$

Exercice 10

On admet que la fonction f est définie par :
$f(x)=(x^2-2\cdot x+1)\cdot e^{-2\cdot x+6}$

1. Monter que $f'(x)=(-2\cdot x^2+6\cdot x-4)\cdot e^{-2\cdot x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}7\,;6]$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}7\,;6]$.
On ne demande pas de calculer les ordonnées.

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par :
$$u_0=1 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{2}{1+\dfrac{2}{u_n}}$$

1. Déterminer les 5 premiers termes de la suite (u_n).
2. Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n).
3. Conjecturer l'expression explicite du terme général de la suite (u_n) en fonction de son rang n.

Exercice 12

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_n=\frac{1-n}{1+n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer une expression simplifiée de $u_{n+1}-u_n$.
2. En déduire les variations de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$.

Exercice 13

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

1. Pour passer du terme v_7 au terme v_{15}, combien de fois ajoute-t-on la raison?
2. On donne les valeurs suivantes de termes :
$v_7=13 \quad ; \quad v_{15}=39$
Déterminer la valeur du premier terme et de la raison de la suite.

Exercice 14

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme $\dfrac{2^4}{3}$ et de raison $\dfrac{3}{2}$.

1. Déterminer la valeur des termes u_{11} et u_{28}.
2. Pour chaque question, déterminer le rang n réalisant l'égalité :

a. $u_n=\dfrac{3^8}{2^5}$ b. $u_n=\dfrac{3^{19}}{2^{16}}$

Exercice 15

Un coureur se lance un défi : il souhaite faire le tour de l'Europe.
Le premier jour, il parcourt $50\,km$. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de $1\,\%$.

On note u_n la longueur parcourue par le coureur le n-ième jour. En supposant ue le coureur poursuit indéfiniment sa course, on obtient une suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul.

1. Déterminer la valeur des quatre permiers termes de la suite (u_n).
2. a. Quelle est la nature de la suite (u_n)? Donner les élèments caractéristiques de la suite (u_n).

b. Exprimer le terme u_n en fonction du rang n.

c. Quelle distance sera parcourue par le coureur le 100^e jour? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.

3. Pour tout entier naturel n, on note S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n) : $S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$

a. Exprimer la somme S_n en fonction du rang n.

b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres:

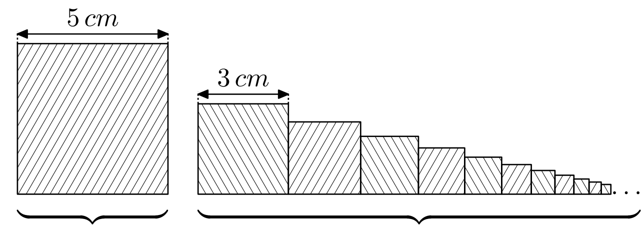
n	10	100	500	750	1000
u_n					

c. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite des termes de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 16

Dans cet exercice, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. La qualité des justifications sera également prise en compte.

On considère les deux figures ci-dessous:



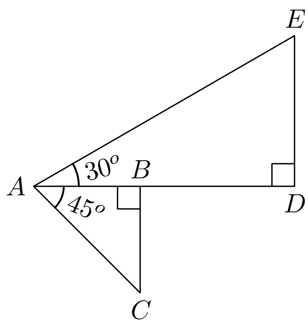
Première figure Seconde figure

- La première figure est un carré dont les côtés mesurent 5 *cm*;
- La seconde figure est composée d'un carré dont les côtés mesures 3 *cm*, pour compléter la figure, on y ajoute un nouveau carré dont les dimensions ont été réduite par le coefficient $\frac{4}{5}$. On répète un certain nombre de fois cette figure sans pour autant savoir combien de fois!

De ces deux figures, laquelle possède la plus grande aire?

Exercice 17

On considère la figure ci-dessous où: $AE=4\,cm$ et $AC=2\,cm$
et on munit le plan du repère orthonormé, orienté dans le sens direct, dont l'unité mesure 1 *cm*, et dont l'axe des abscisses est la droite (AD).



1. Déterminer les valeurs exactes des longueurs des côtés des triangles ABC et ADE.

2. Etablir l'égalité:
$$\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) = AD\times AB - DE\times BC$$

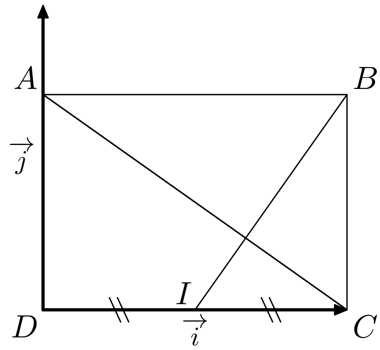
3. Déterminer la valeur du produit scalaire: $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$

Exercice 18

Soit a un nombre réel positif. On considère le rectangle $ABCD$ tel que:

$AB=a$; $AD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

On note I le milieu de $[CD]$. Une représentation est donnée ci-dessous:



On considère le plan munit d'un repère orthonormé $(D\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ dans le sens direct où $\vec{i}=\overrightarrow{DC}$:

1. Déterminer les coordonnées des différents points de cette figure.

2. En déduire que les droites (AC) et (IB) sont perpendiculaires.

Question subsidiaire: reprendre la question 2. sans utiliser les coordonnées des points.

Exercice 19

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$:

Soit A, B, C trois points du plan de coordonnées respective $(-2\,;3)$, $(1\,;-4)$ et $(0\,;-2)$

1. Déterminer les valeurs de $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\|\overrightarrow{BA}\|$ et $\|\overrightarrow{BC}\|$.

2. En déduire la mesure de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$ au centième près de degrés.

Exercice 20

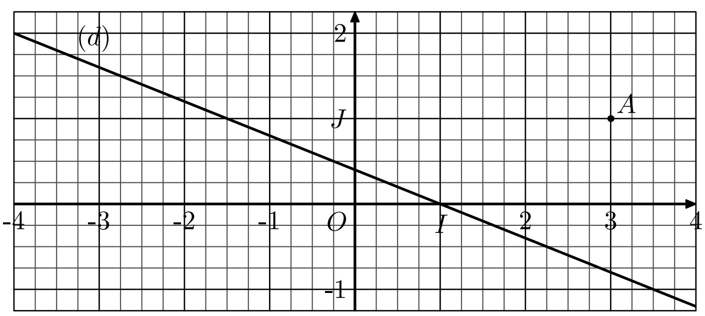
On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.

1. On considère la droite (d) admettant le vecteur $\vec{n}(-2\,;1)$ et passant par le point $A(4\,;1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).

2. On considère la droite (d') admettant l'équation cartésienne:
$x-4\cdot y+3=0$
Donner un vecteur $\vec{v}$ normal de (d'), un vecteur $\vec{u}$ directeur de (d') et un point B appartenant à (d').

Exercice 21

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère le point $A(3\,;1)$ et la droite (d) représentée ci-dessous d'équation cartésienne: $2\cdot x+5\cdot y-2=0$



On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

1. Construire le point H dans le repère.

2. Déterminer les coordonnées du point H.

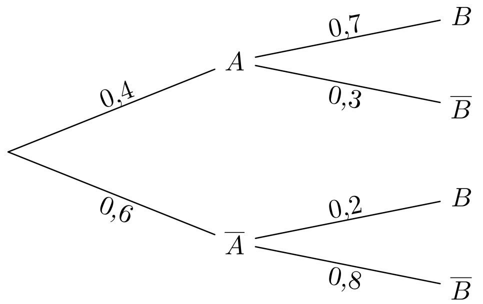
Exercice 22

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé et le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(2\,;1)$ et de rayon 4.

Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 23

On considère l'arbre de probabilité incomplé suivant :



1. Par lecture de cet arbre, donner les probabilités ci-dessous :

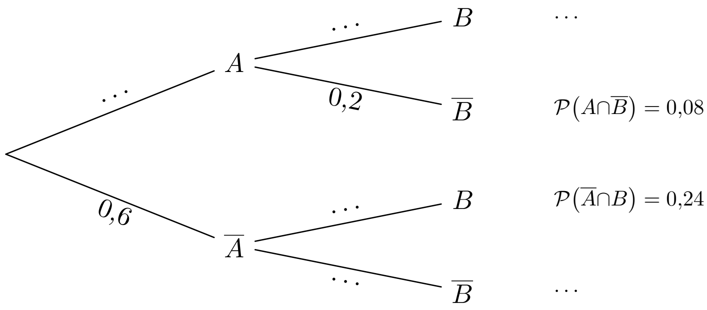
   a. $\mathcal{P}_A(B)$ b. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)$

2. Déterminer les probabilités ci-dessous :

   a. $\mathcal{P}(A\cap B)$ b. $\mathcal{P}(\overline{A}\cap B)$

Exercice 24

On considère l'arbre de probabilité incomplet suivant :



Déterminer les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(A)$ b. $\mathcal{P}_A(B)$ c. $\mathcal{P}(A\cap B)$

d. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)$ e. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$ f. $\mathcal{P}(\overline{A}\cap\overline{B})$

Exercice 25

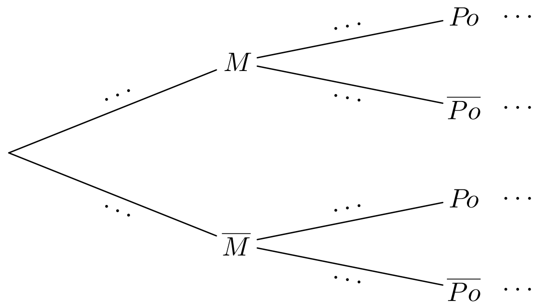
Rappels

- On note $\overline{A}$ l'événement contraire d'un évènement A, $\mathcal{P}(A)$ la probabilité d'un événement A,
- "A et B" ou $A\cap B$ l'intersection de deux évènements A et B,
- "A ou B" ou $A\cup B$ la réunion de deux évènements A et B.
- $P_B(A)$ la probabilité qu'un évènement A se réalise, sachant qu'un évènement B *(de probabilité nulle)* est déjà réalisé. On a :
  $$\mathcal{P}_B(A) = \frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{\mathcal{P}(A \text{ et } B)}{\mathcal{P}(B)}$$

Dans un pays européen, 12 % des moutons sont atteints par une maladie.
Un test de dépistage de cette maladie vient d'être mis sur le marché mais il n'est pas totalement fiable.
Une étude a montré que quand le mouton est malade le test est positif dans 93 % des cas ; quand le mouton est sain, le test est négatif dans 97 % des cas.

On choisit un mouton au hasard et on le soumet au test de dépistage de la maladie.
On note M l'événement "*le mouton est malade*".
On note Po l'événement "*le test est positif*".

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. Calculer les probabilités des évènements A, B, C suivants :
   - A : "Le mouton est malade et le test est positif"
   - B : "Le mouton est sain et le test est positif"
   - C : "Le mouton est malade et le test est négatif".
3. En déduire que la probabilité de l'événement Po est égale à 0,138.
   Quelle est la probabilité que le test soit négatif ?
4. Dans cette question les résultats seront arrondis au millième.

   a. Sachant qu'un mouton a un test positif, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas malade ?

   b. Sachant qu'un mouton a un test négatif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Exercice 26

Cinq garçons et trois filles participent écrivent leur nom sur un bout de papier et l'insère dans une urne.

On extrait, successivement et avec remise, deux bouts de papier de l'urne. On considère que les deux tirages sont indépendants.

1. A chaque tirage, on regarde si le papier tiré désigne un garçon ou une fille. Construire l'arbre de probabilité lié à cette expérience.
2. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associant à une issue de ce tirage le nombre de filles sélectionnées.

   a. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

   b. Calculer son espérance mathématique de $E(\mathcal{X})$.

